

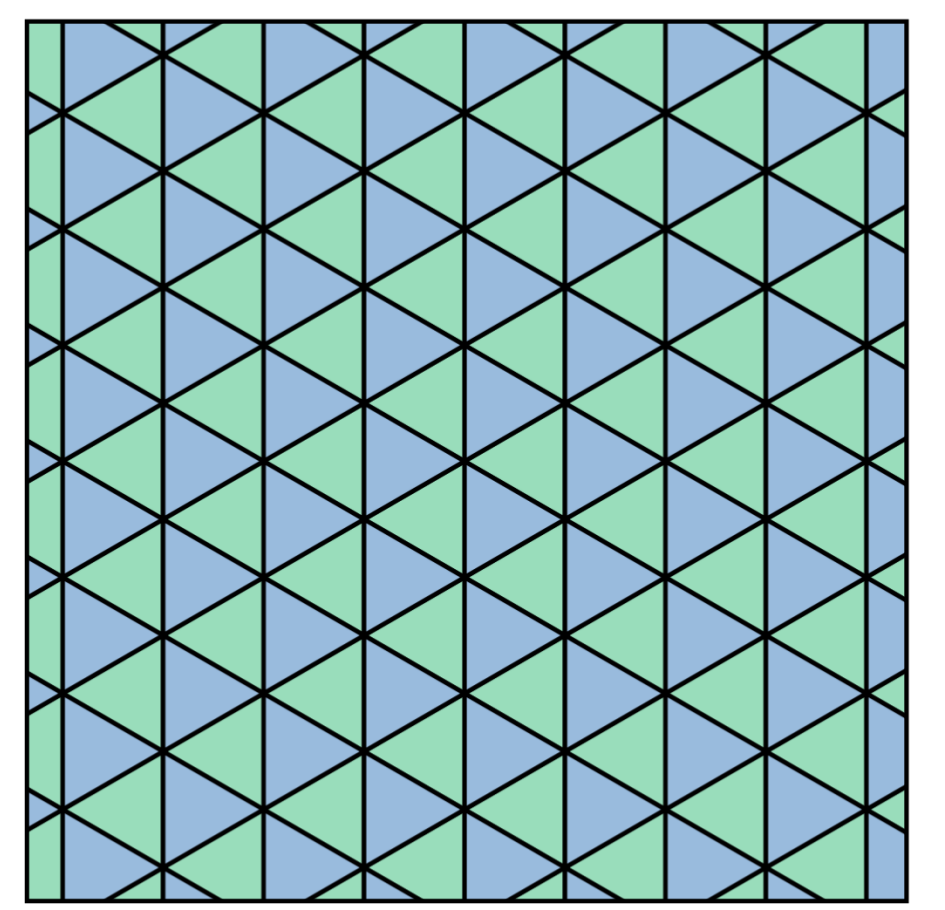
Pavages avec un seul type de pièce

pavage: **partition d'une surface** (très souvent le plan) par des éléments d'un ensemble fini, appelés **pièces** ou **tuiles**. Cela revient à couvrir la surface avec les pièces sans que celles-ci se superposent.

Pavage du plan avec un polygone régulier

Les pièces les plus simples en géométrie sont les **polygones réguliers** (dont tous les côtés ont même longueur et tous les angles sont égaux). Seuls **trois polygones réguliers** permettent de paver le plan: le **triangle équilatéral**, le **carré**, et l' **hexagone régulier**.

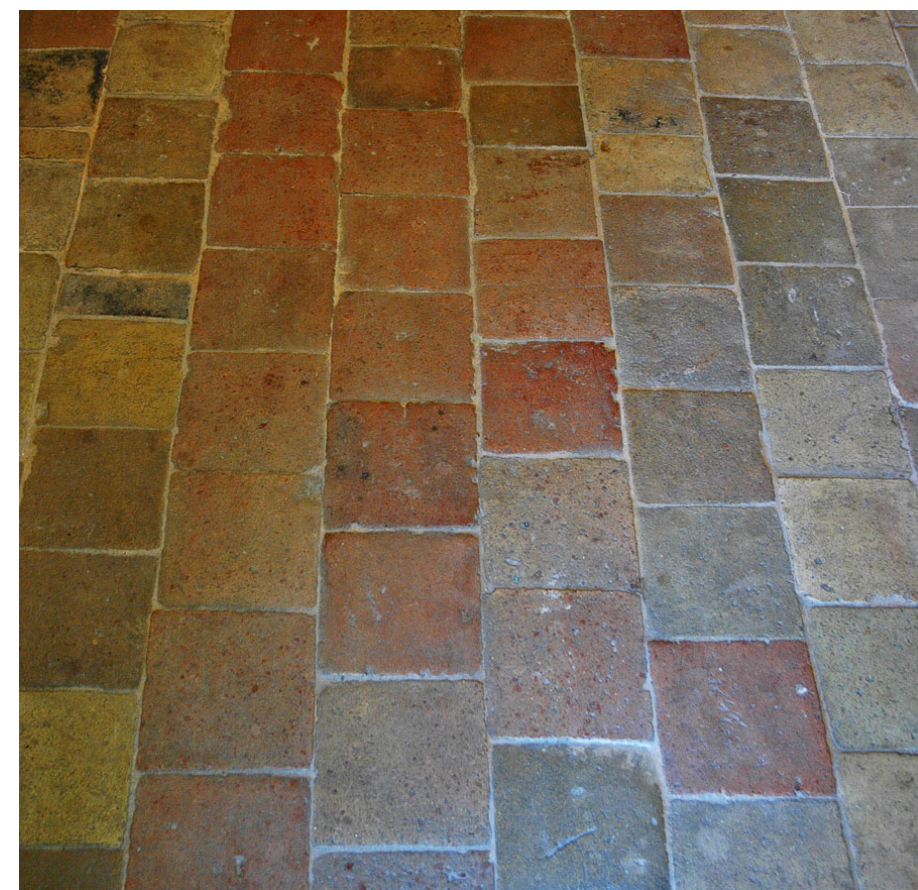
- Avec le **triangle** et le **carré**, **plusieurs** sont **possibles**. A partir du pavage uniforme, on peut faire coulisser les colonnes à loisir. En termes de carrelage, le pavage uniforme est une **pose droite**. Si on décale les colonnes, c'est une **pose à joints contrariés**.
- Avec l'**hexagone**, **un seul** pavage est possible. C'est celui des tomettes et du nid d'abeilles.



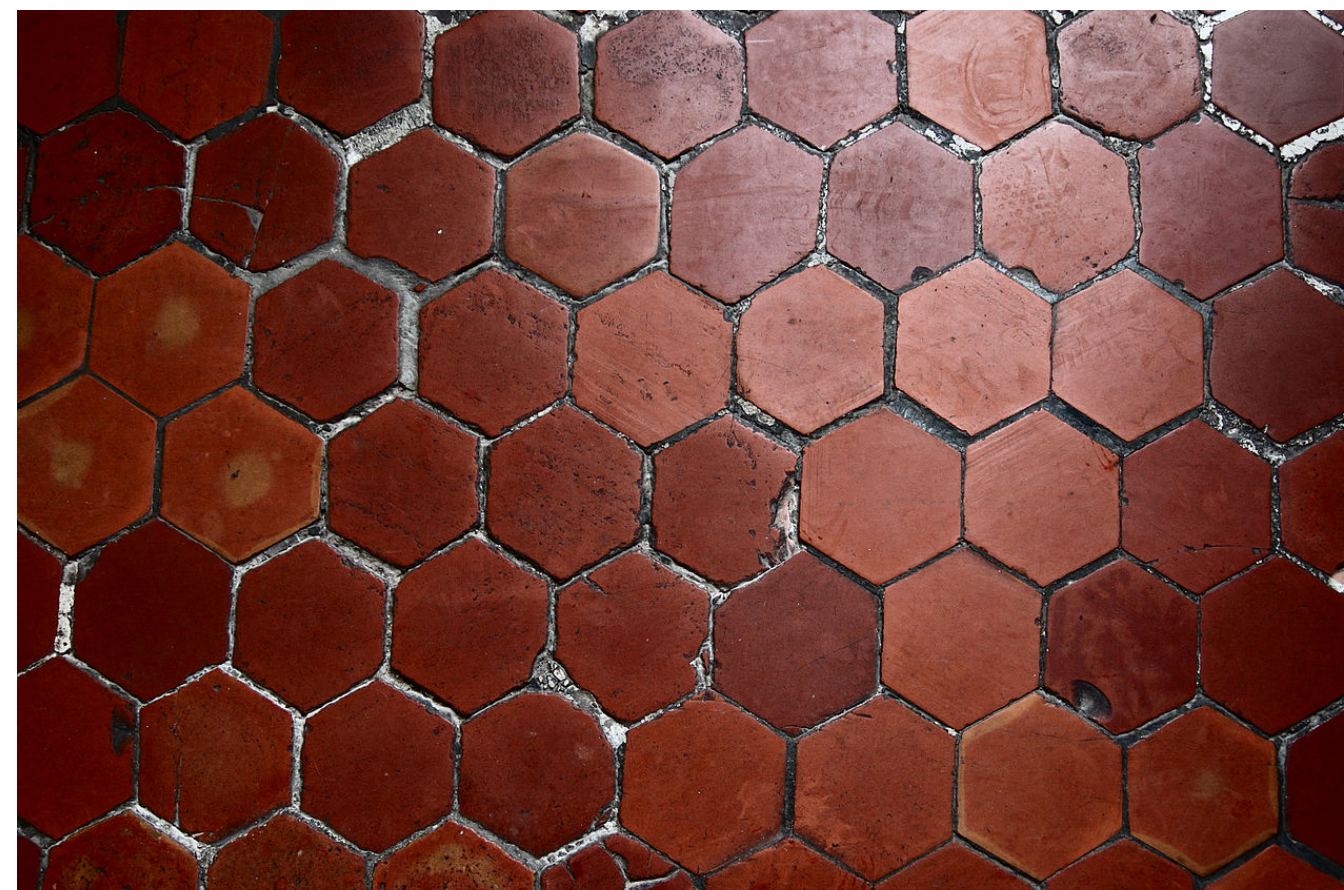
Pavage triangulaire uniforme



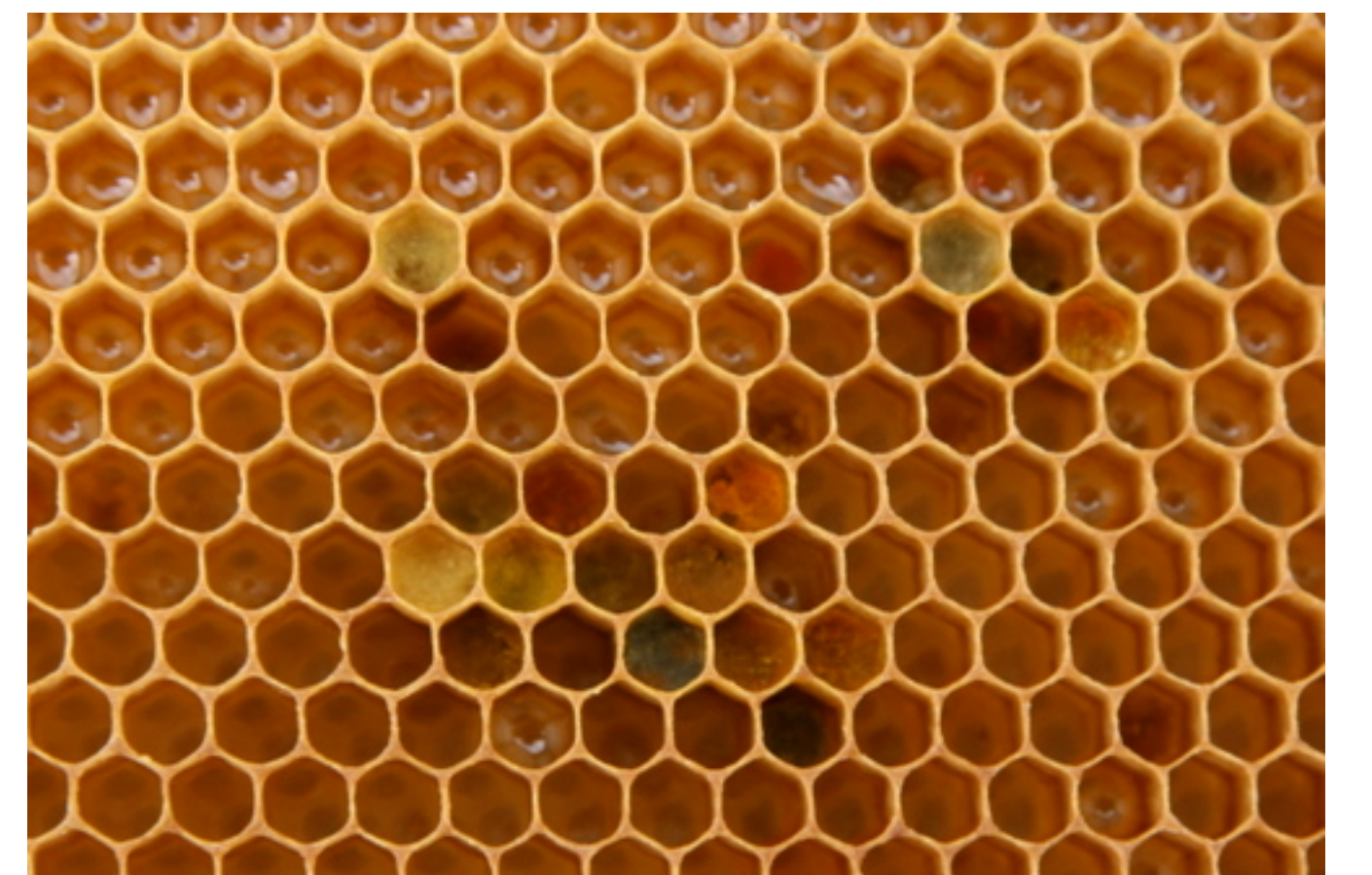
Pose droite



Pose à joints contrariés



Tomettes



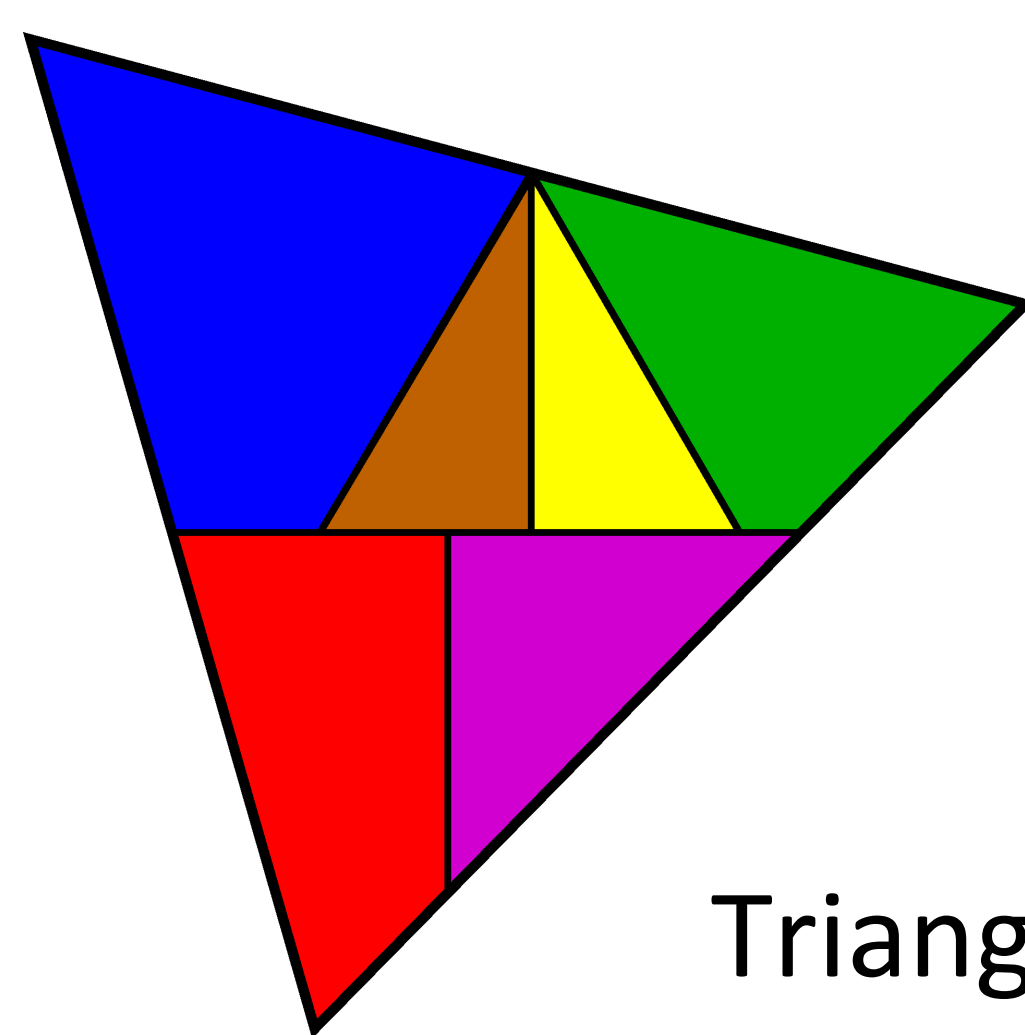
Nid d'abeille

L'abeille, une paveuse économe

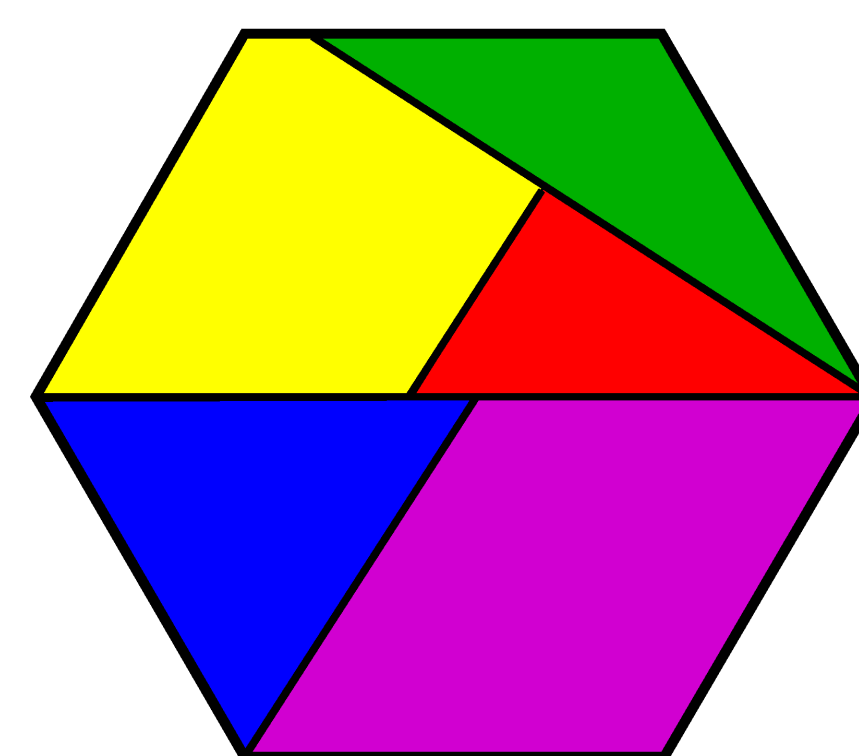
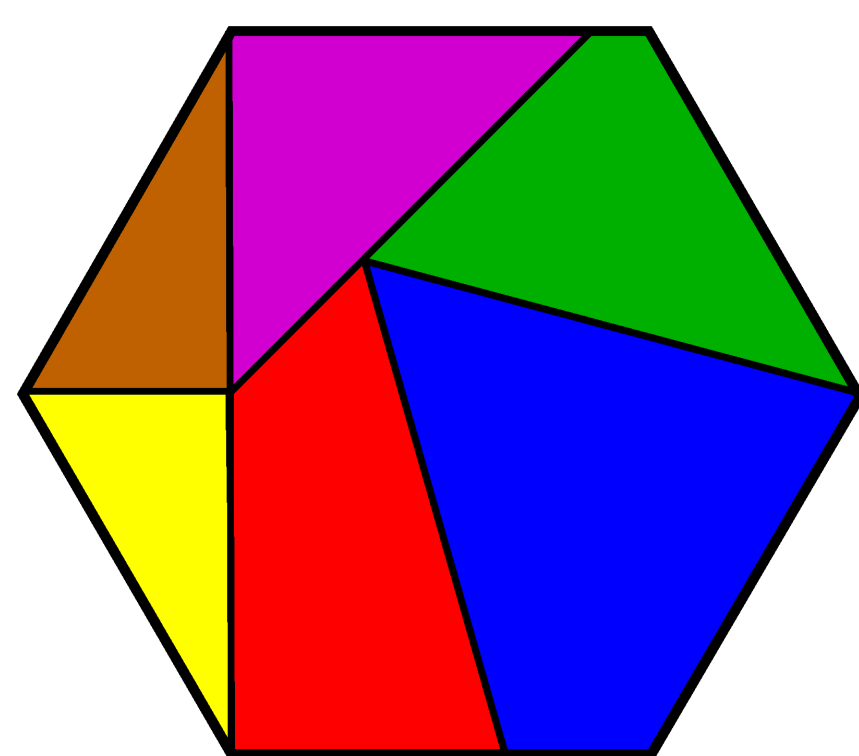
Lors de la construction des ruches, les abeilles commencent par paver un plan avec des hexagones. C'est ce qui permet d'utiliser **le moins de cire possible** pour occuper une même surface, comme l'affirme le théorème suivant.

Théorème « du nid d'abeille » : De toutes les formes de même surface avec lesquelles on peut paver le plan, l'hexagone possède le plus petit périmètre.

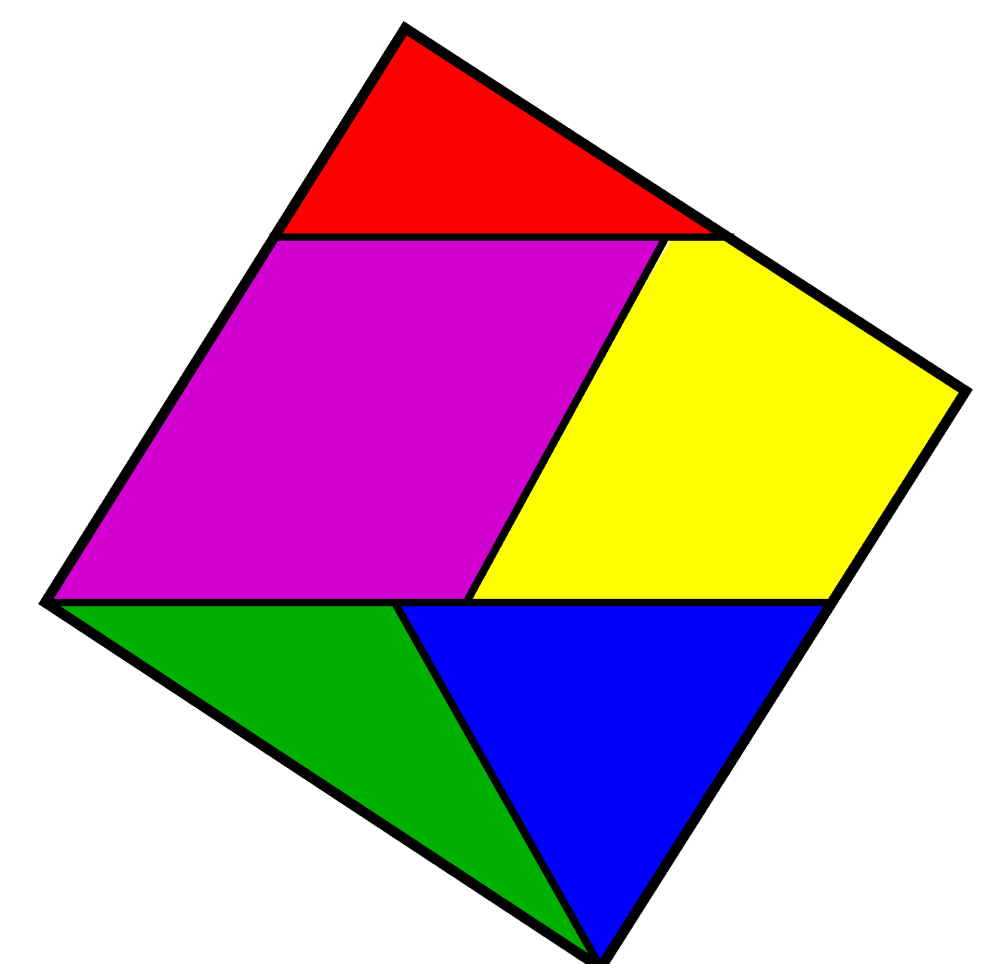
On peut montrer que l'hexagone régulier a un périmètre plus petit qu'un triangle équilatéral (resp. un carré) de même surface en utilisant des **pavages** : on reconstitue l'hexagone et le triangle (resp. le carré) avec les mêmes formes pour garantir qu'ils ont **même surface**. Voir figure ci-dessous. On vérifie ensuite que **l'hexagone a le plus petit périmètre**.



Triangle et hexagone de même aire



Hexagone et carré de même aire

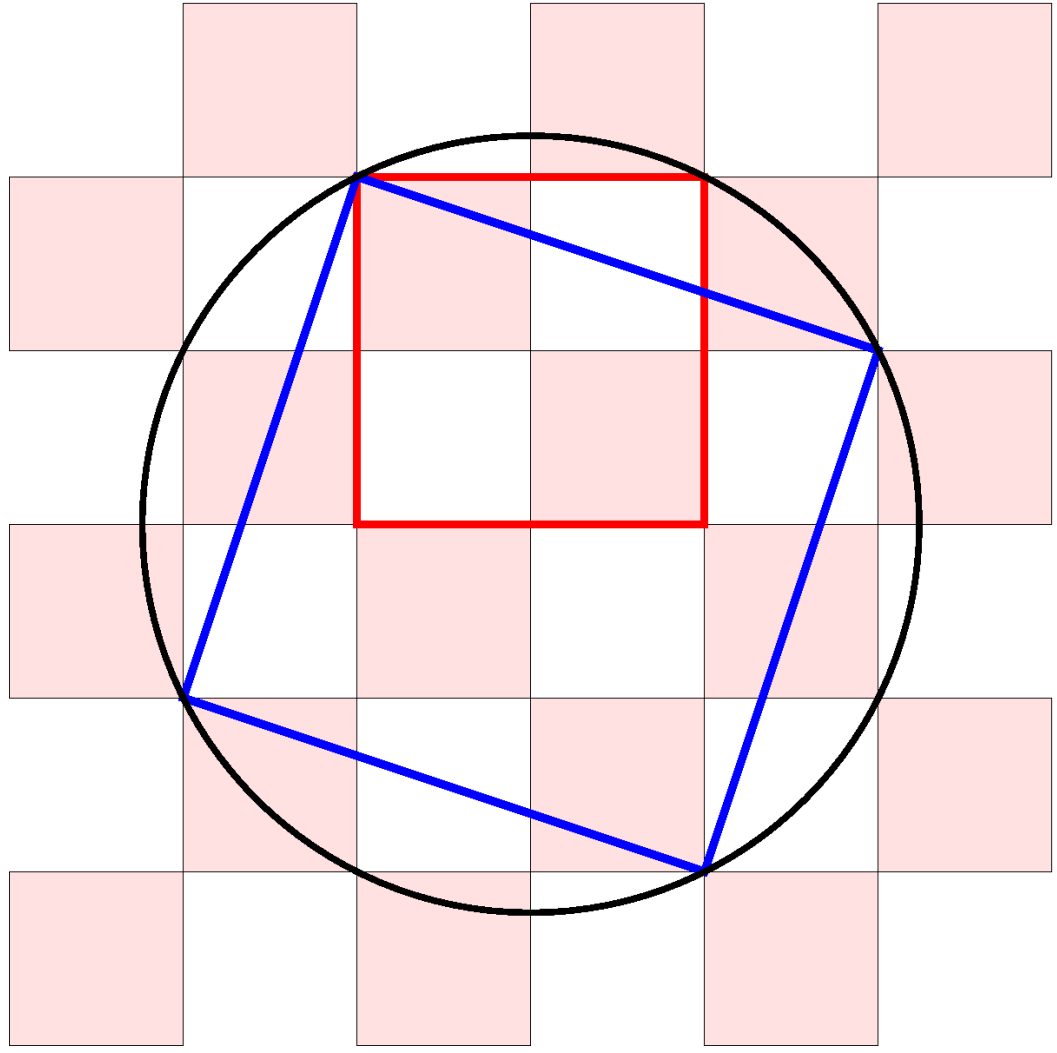
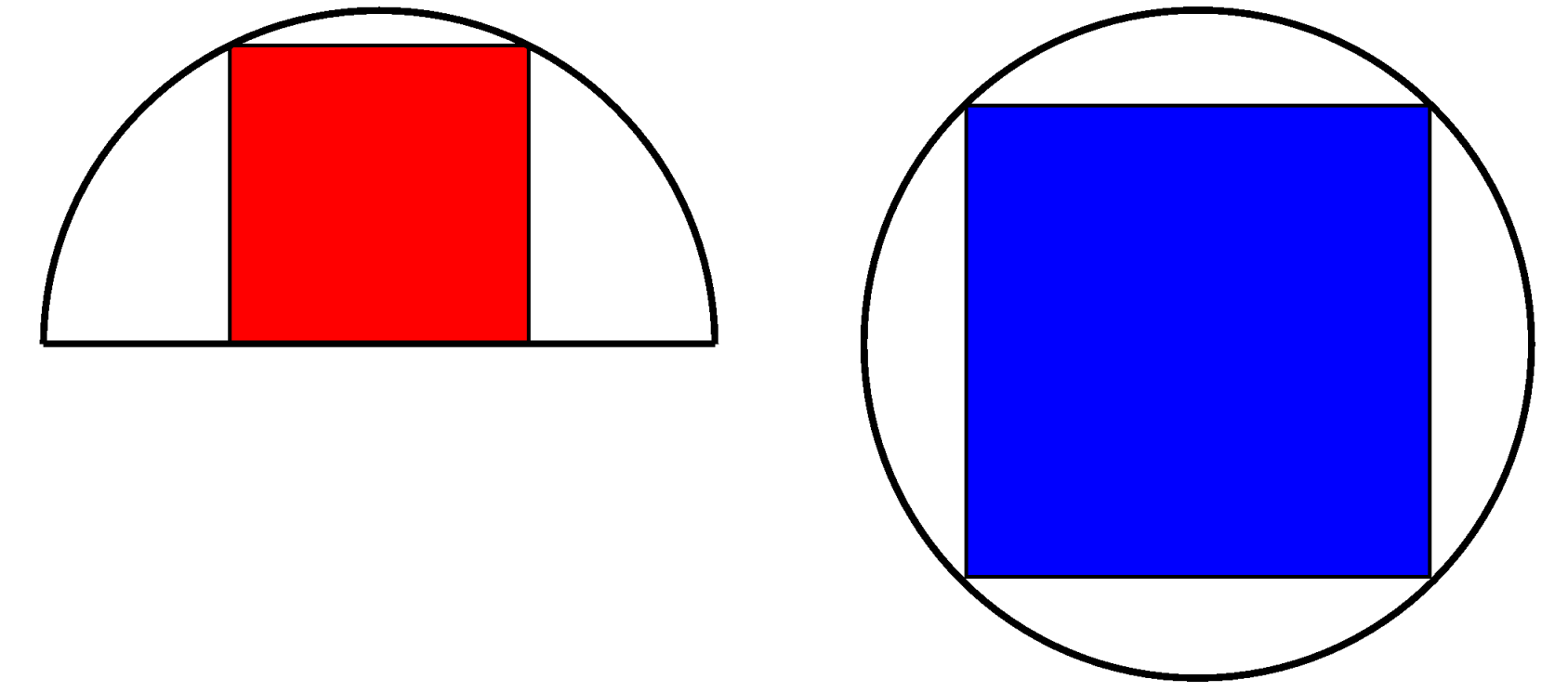


Le théorème pour des pièces ayant des formes de polygones quelconques a été démontré par le mathématicien hongrois F. Toth en 1943, et sa version générale pour des pièces avec des formes aux côtés courbes par T. C. Hales en 1999.

Pavages et preuves

Nous avons vu comment le théorème « du nid d'abeille » peut se prouver à l'aide de pavage.
En fait, **de nombreux théorèmes peuvent se prouver avec des pavages**.

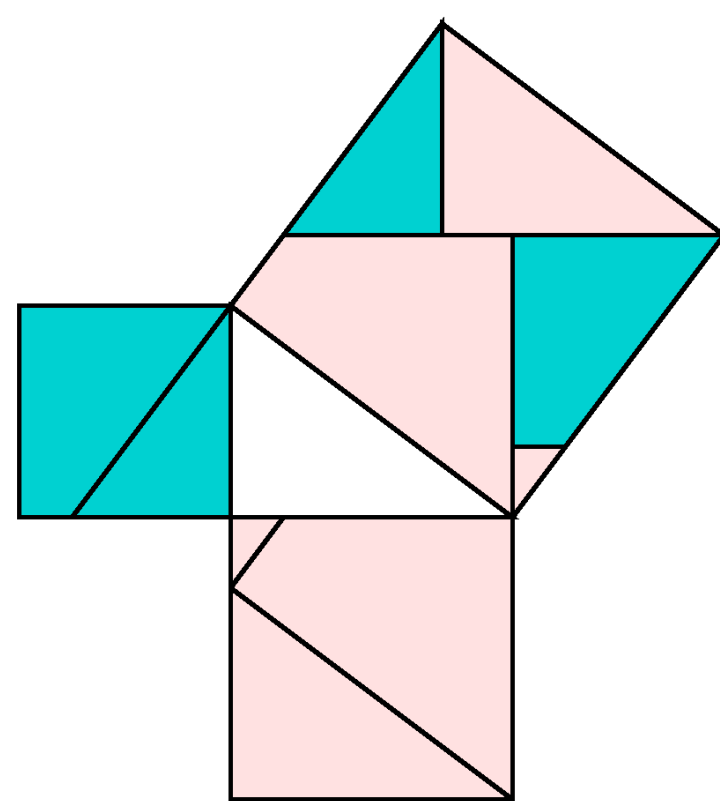
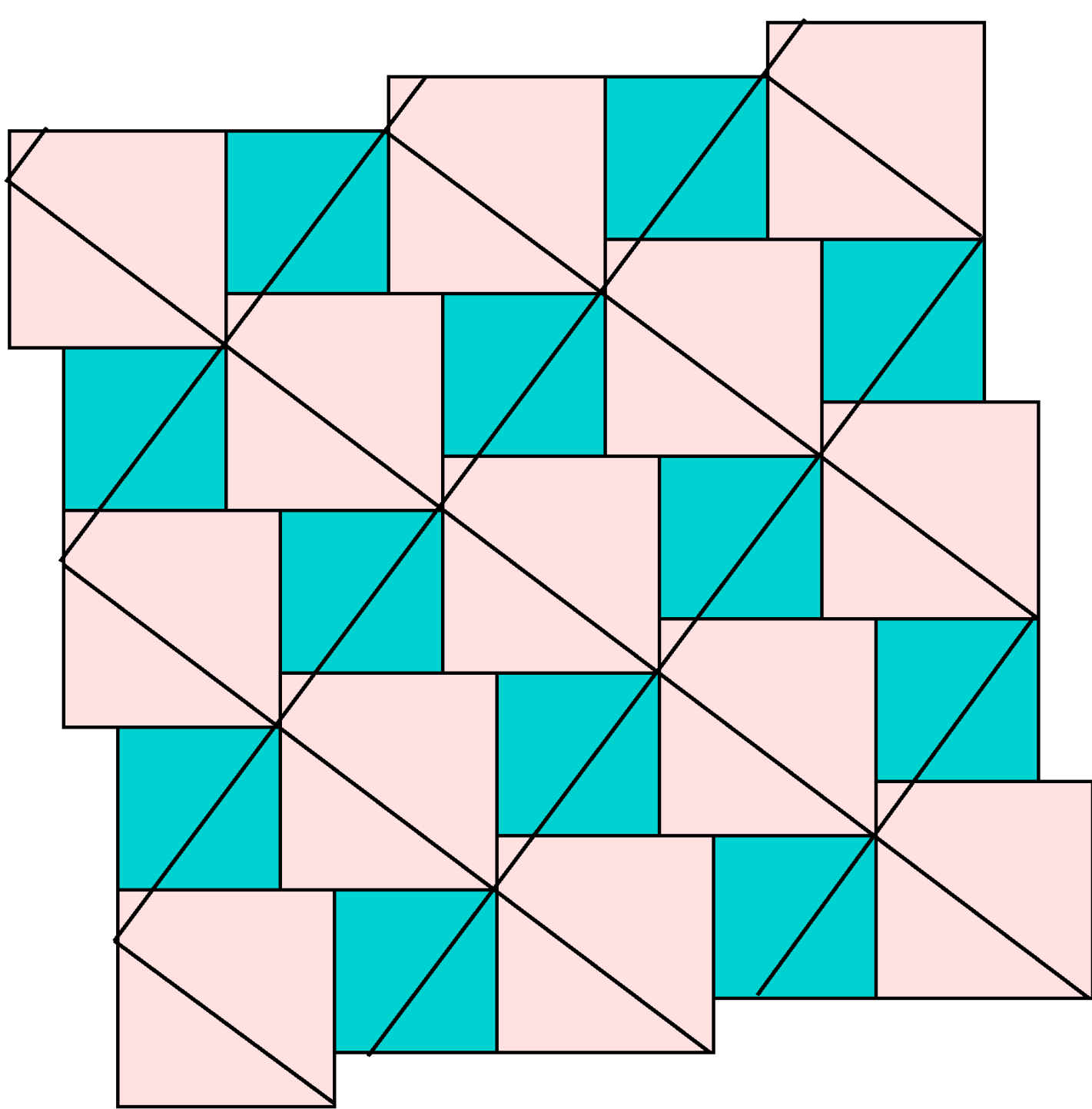
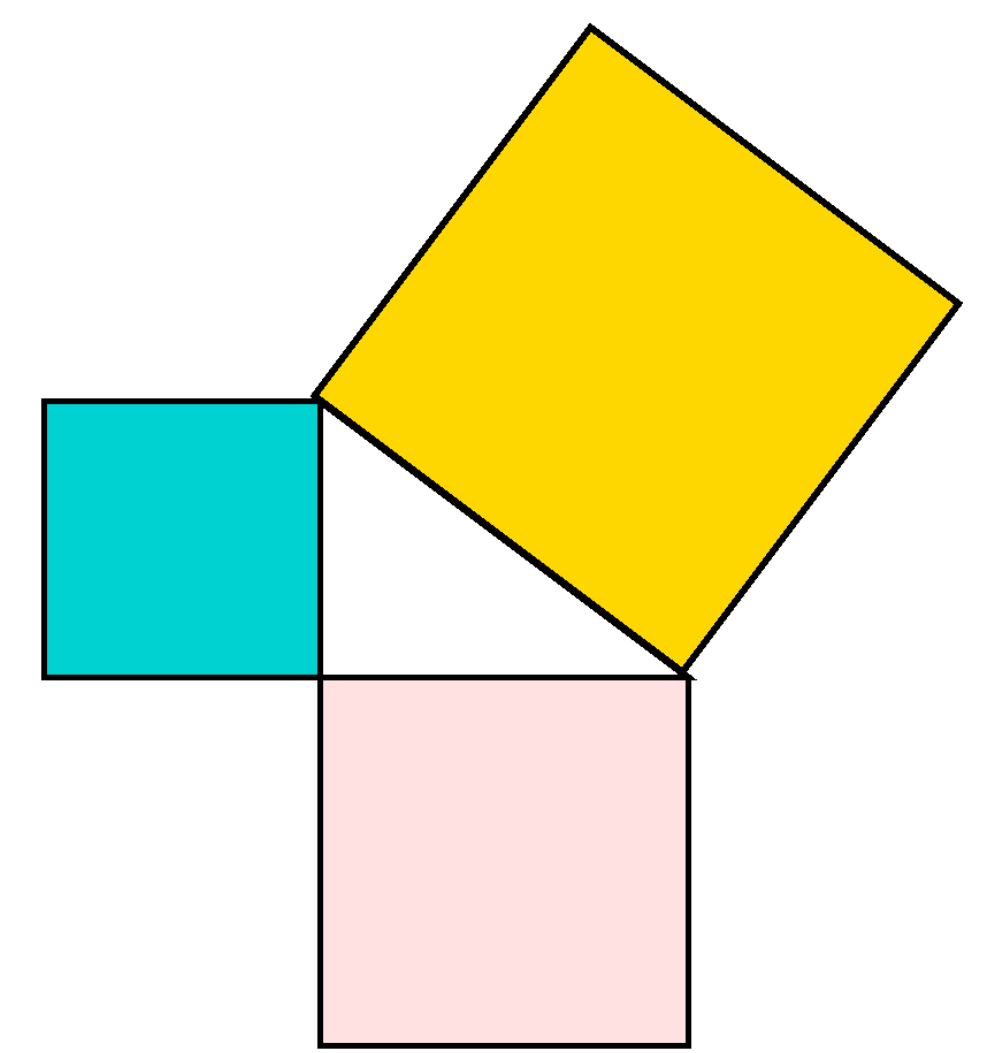
Théorème : La surface d'un carré inscrit dans un demi-cercle (carré rouge) vaut deux cinquièmes ($2/5$) de celle d'un carré inscrit dans un cercle de même rayon (carré bleu).



Ce théorème peut se trouver à l'aide d'un classique **pavage en damier**. Il faut disposer les carrés comme sur la figure à gauche. On voit alors que le **carré rouge** inscrit dans le demi-cercle a une **surface de 4 petits carrés** (2 roses et 2 blancs) et le **carré bleu** inscrit dans le cercle a une **surface de 10 petits carrés** (5 roses et 5 blancs).

A l'aide de pavages, on peut également prouver le très célèbre **Théorème de Pythagore**.

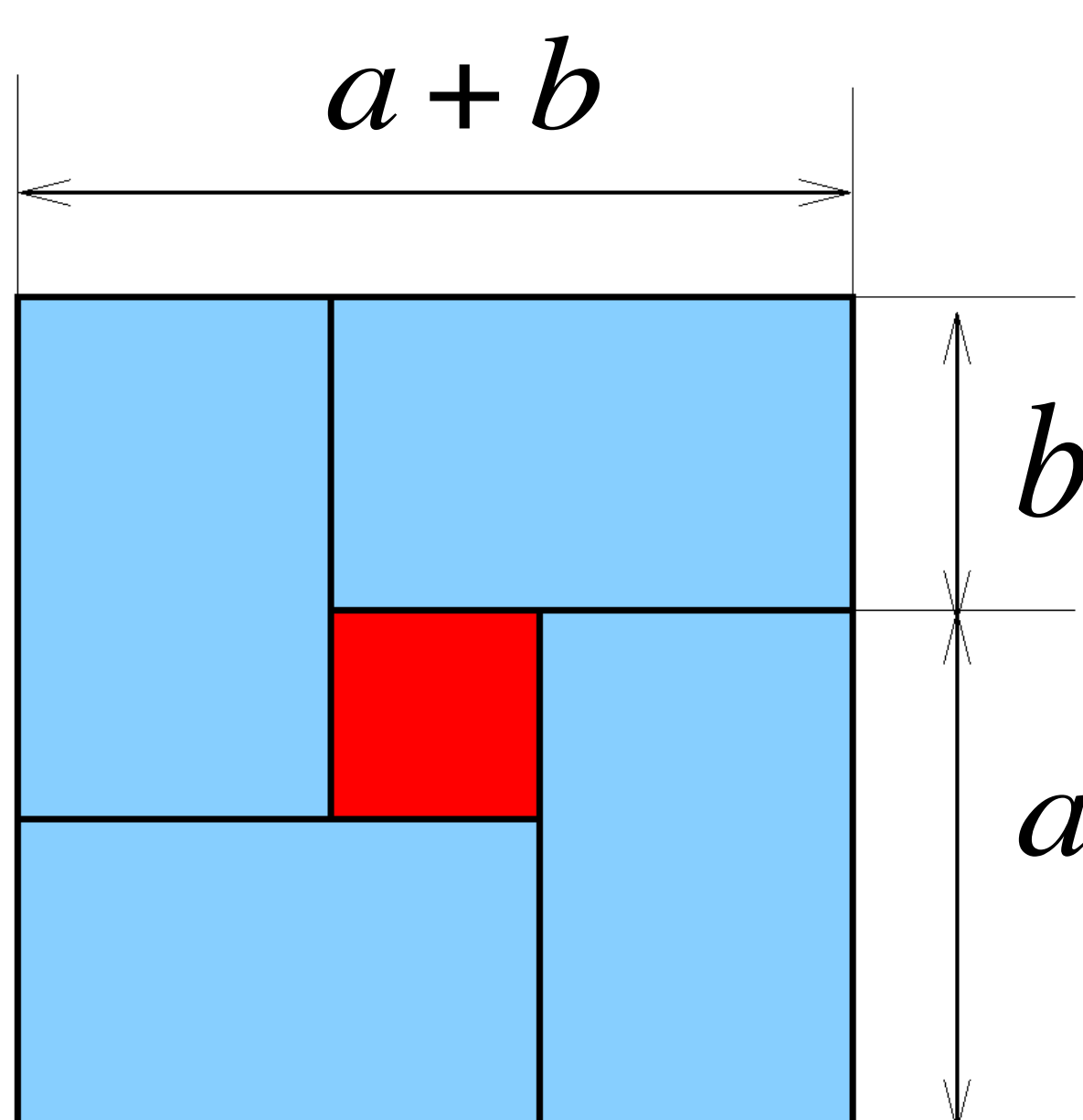
Théorème de Pythagore : Pour un triangle rectangle, la surface du carré de l'hypothénuse (en jaune) est égale à la somme des surfaces des carrés des deux autres côtés (en bleu et en rose).



On peut démontrer le **Théorème de Pythagore** en faisant un **pavage en pipe** avec les deux petits carrés et en découpant les pièces suivant les lignes de la figure de droite. On voit alors qu'on peut paver le carré de l'hypothénuse avec les pièces des deux autres carrés ainsi obtenues. Ce découpage est dû à Annairizi d'Arabie (vers 900).

Théorème : Soient a et b deux nombres positifs.
Leur moyenne géométrique est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique.

$$\sqrt{ab} \leq (a + b) / 2$$



Ce théorème peut se prouver en utilisant un **pavage en pipe** avec 4 rectangles (bleus) de surface $a \times b$ et un carré (rouge) de côté $a - b$.

Le grand carré formé par ces cinq pièces est de côté $a + b$ et donc de surface $(a + b)^2$.

La surface des 4 rectangles est inférieure à celle du grand carré.

$$\text{Donc } 4ab \leq (a + b)^2$$

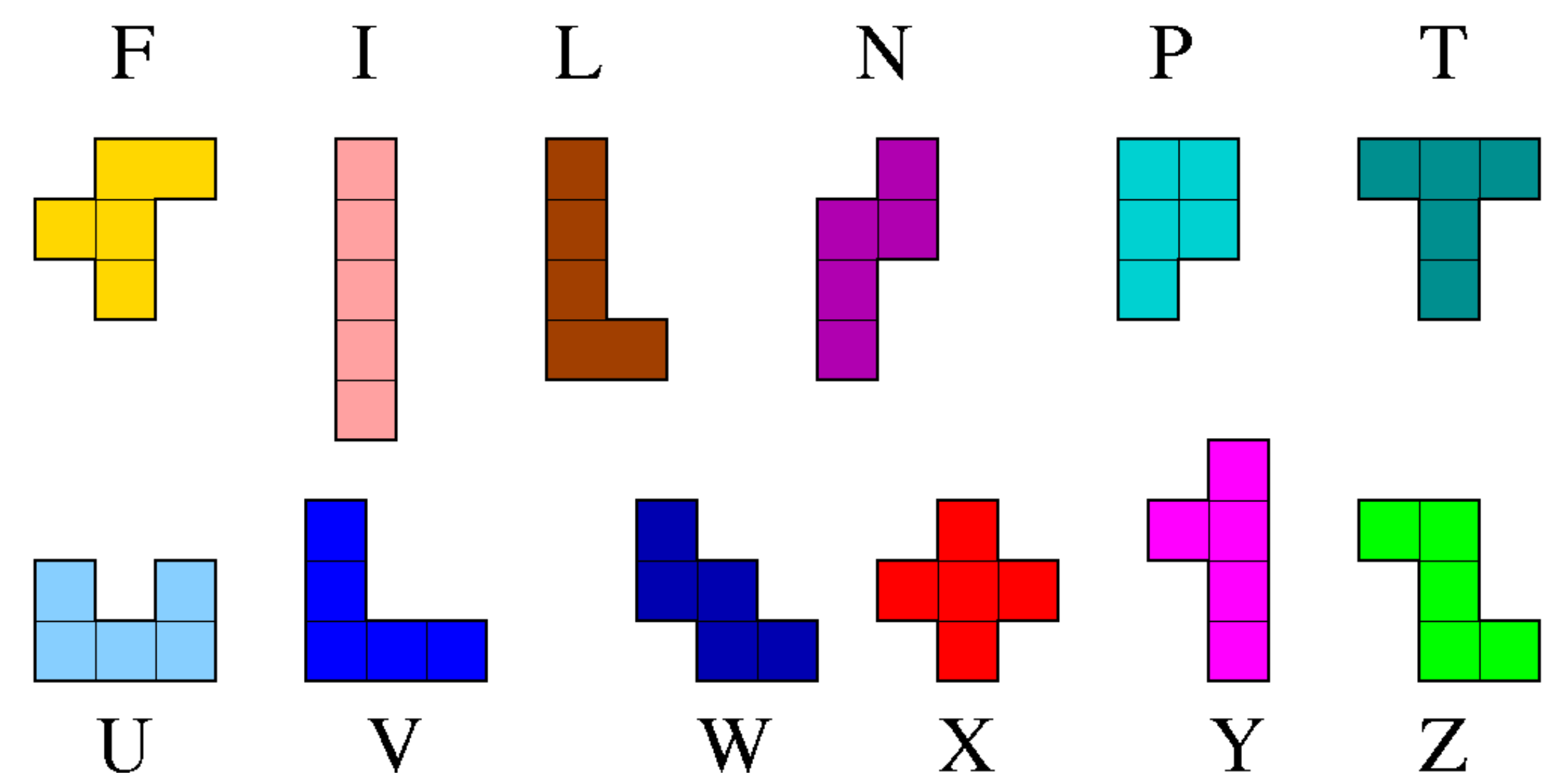
$$\text{Soit } \sqrt{ab} \leq (a + b) / 2$$

Pavages : pentominos

Qu'est-ce qu'un pentomino ?

Un **Pentomino** est une figure géométrique composée de 5 carrés accolés par leurs côtés.

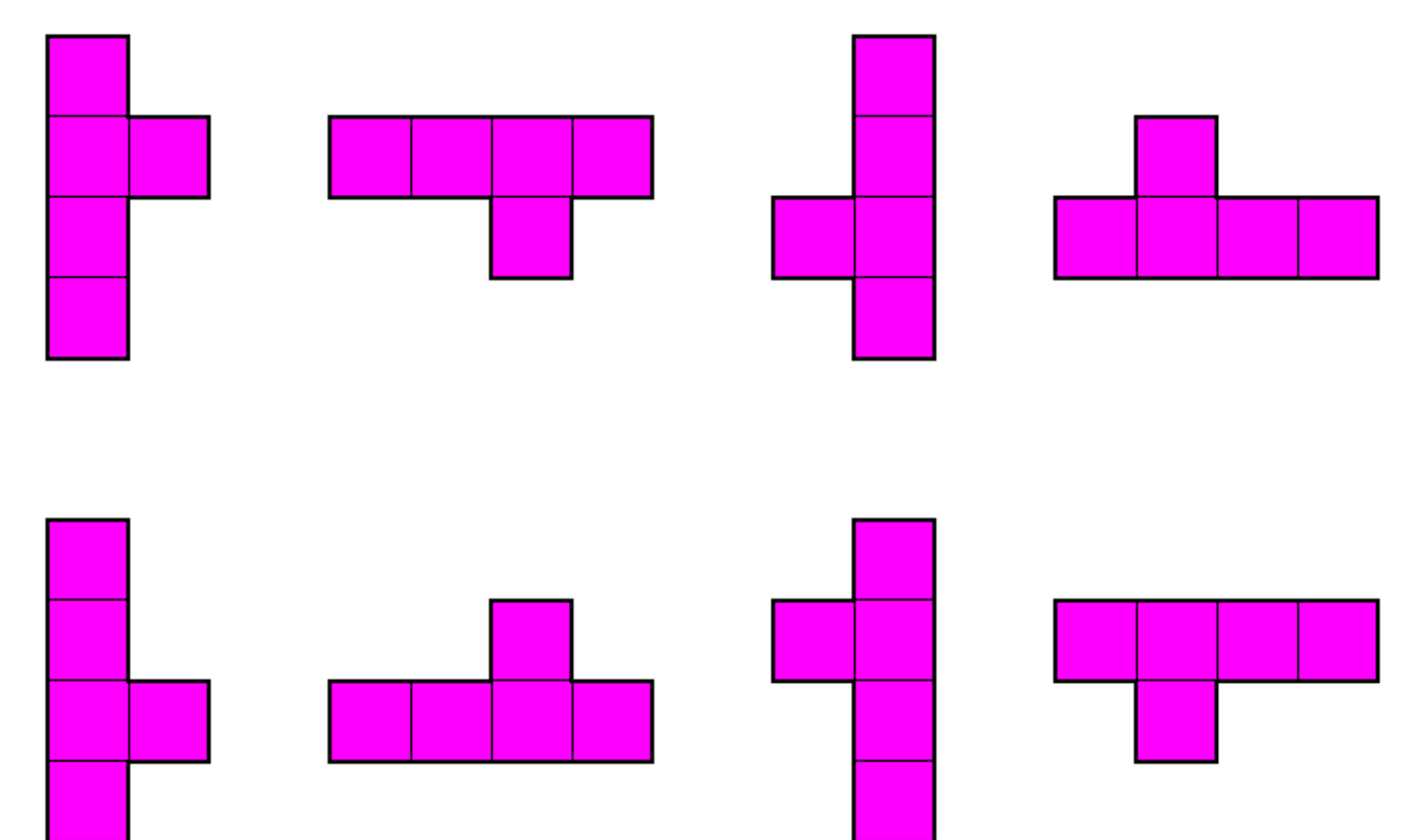
A rotation et symétrie près, il y a **douze pentominos** différents en tout, chacun étant identifié par une lettre de l'alphabet qui rappelle sa forme.



Les douzes pentominos

Par **rotation de 90 degrés** (1/4 de tour) ou **image miroir** (retournement de la pièce), les pentominos peuvent engendrer plusieurs formes:

- L, N, P, F et Y engendrent 8 formes : 4 par rotation et 4 par image miroir.
- Z engendre 4 formes : 2 par rotation et 2 par image miroir.
- T, V, U et W engendrent 4 formes par rotation.
- I engendre 2 formes par rotation.
- X n'engendre qu'une seule forme.



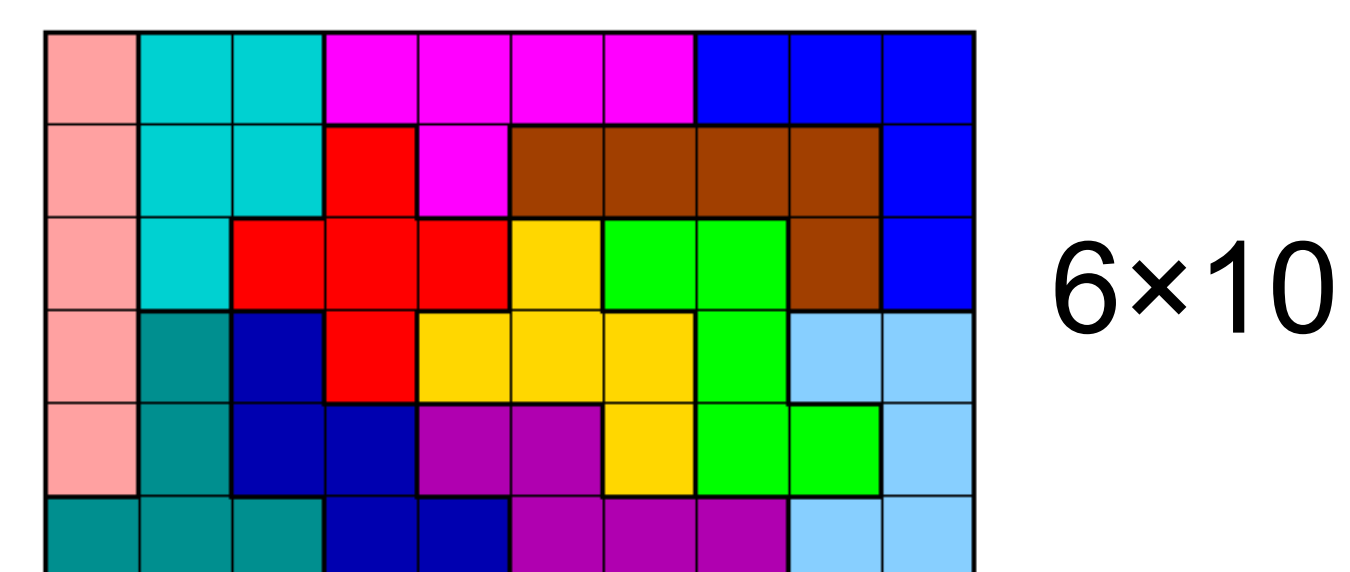
Les 8 formes engendrées par Y

Casse-têtes

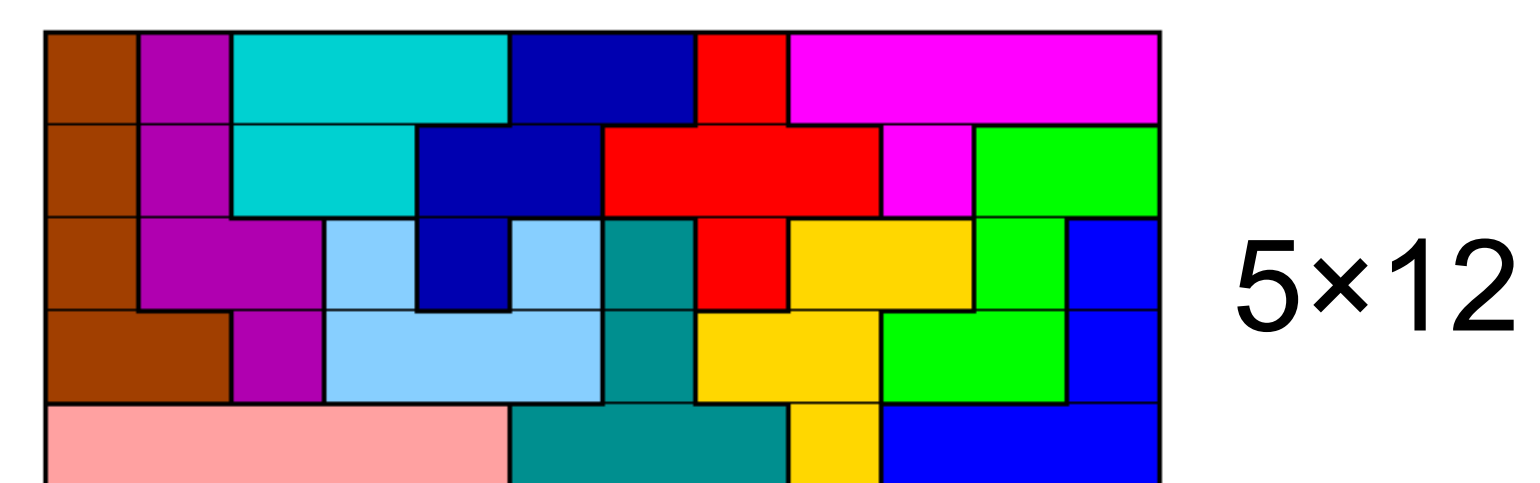
Un casse-tête classique avec les pentominos consiste à **paver un rectangle** sans trous ni chevauchement en utilisant les 12 pentominos. Comme il y a 12 pentominos de 5 carrés, le rectangle doit avoir une **surface de 60 carrés**; les dimensions possibles sont donc 6×10, 5×12, 4×15 et 3×20.

Un défi plus compliqué est de **dénombrer le nombre total de solutions possibles**. Dans la plupart des cas, c'est impossible à faire sans l'aide d'un **ordinateur** et d'un **algorithme d'énumération**.

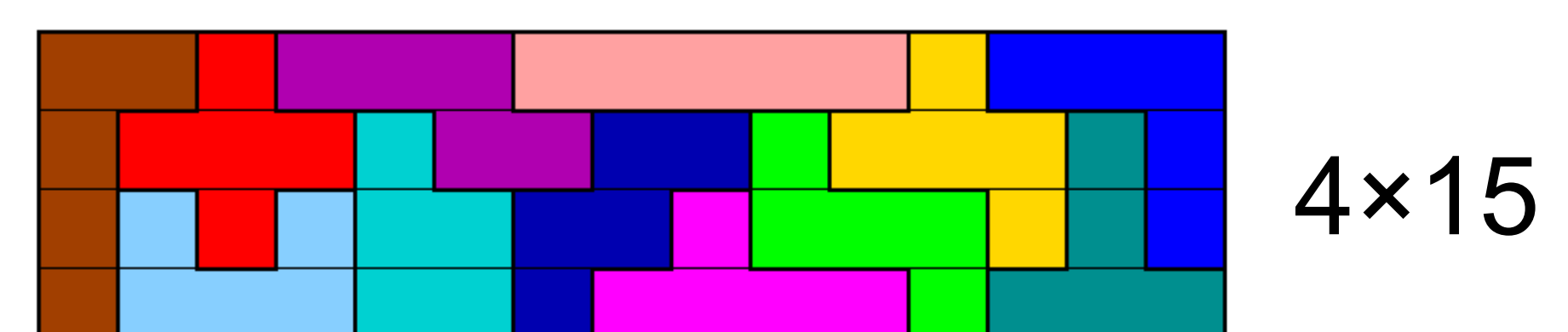
J. G. Fletcher a le premier résolu le cas 6×10 en 1965 : il y a exactement 2 339 solutions (à rotations et réflexions du rectangle près). Le rectangle 5×12 possède 1 010 solutions, le rectangle 4×15 a 368 solutions, et le rectangle 3×20 a seulement 2 solutions.



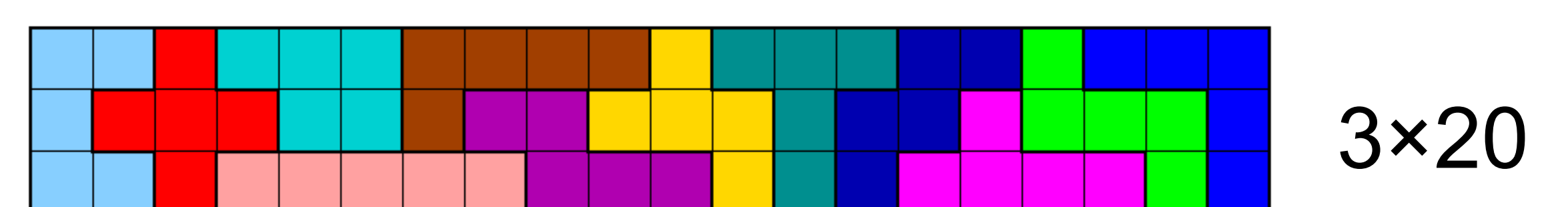
6×10



5×12

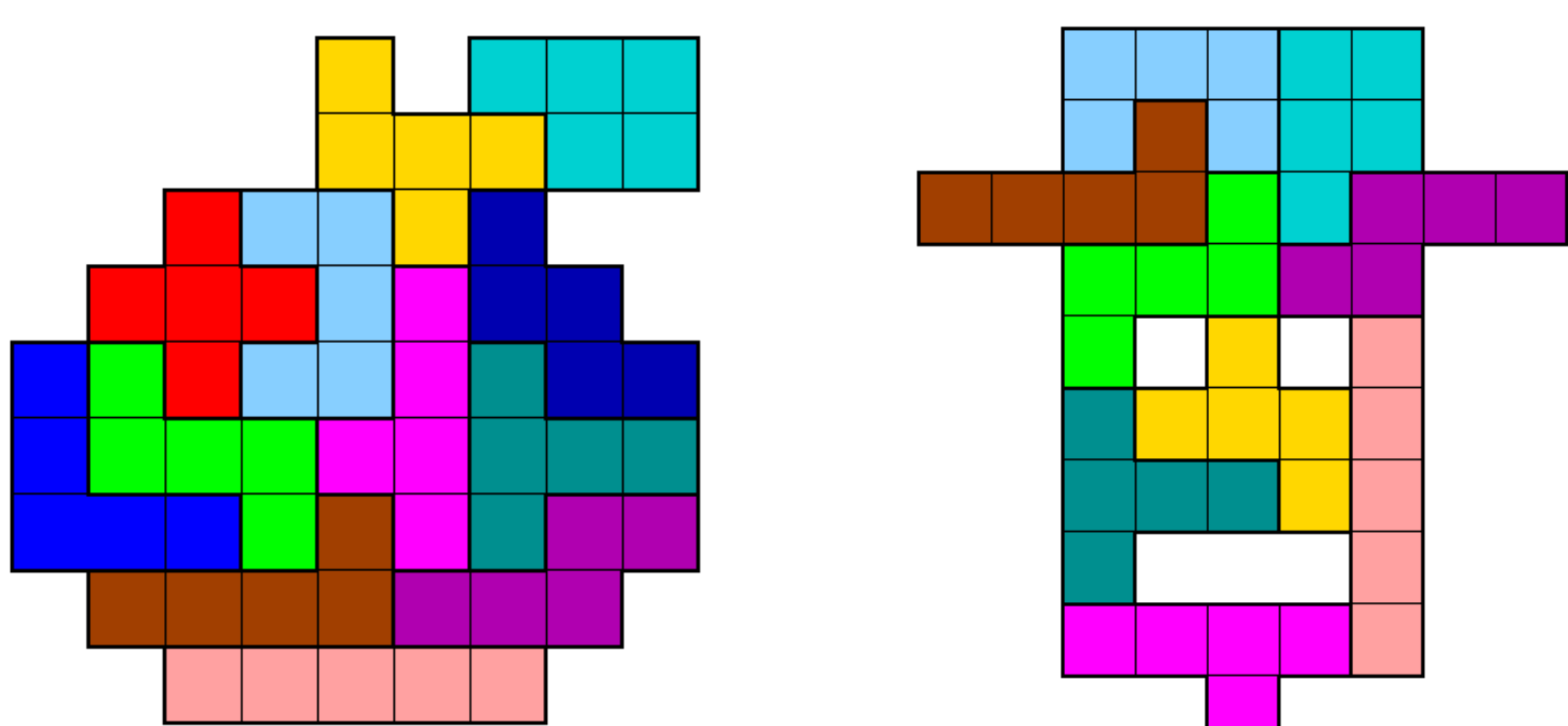


4×15



3×20

Des solutions au pavage des rectangles par les pentominos



Pomme

Tête

D'autres casse-têtes consistent à reconstituer une forme donnée (animal, personnage, ...) avec tout ou partie des pièces, dans le même esprit que le Tangram.